Calcolo della Massa della Terra dalla misura di g
versione semplificata

La forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su di una massa ***m***, sulla sua superficie, è:

$F = G\frac{mM_T}{R_T^2}$ dove ***G*** è la costante di gravitazione universale, M_T la massa della Terra, R_T il raggio terrestre. Questa Forza è usualmente chiamata il "peso" della massa **m** e si scrive come: $\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$, dove *g* è l'accelerazione gravitazionale che vale quindi $g = G\frac{M_T}{R_T^2}$. La massa M_T può quindi essere calcolata dalla relazione: $M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$ Per calcolare la Massa della Terra servono quindi i valori delle tre grandezze ***G, R_T , g.***

Tutte e tre le grandezze si possono misurare. Voi misurerete ***g***, assumendo come noti i valori di ***G e*** R_T.

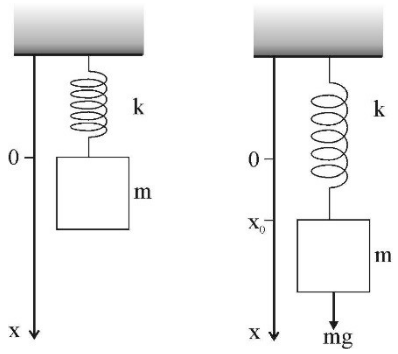
I valori da inserire nella formula per trovare la massa della Terra M_T sono:

R_T = 6314 km [misurato da Eratostene nel 240 a.C.]

G = 6,7 10^{-11} $m^3/kg\ s^2$ [misurato da H. Cavendish nel 1798]

g = Il valore misurato da voi.

Misura di g utilizzando una molla e dei pesi – Teoria



In condizioni di equilibrio la massa **m** appesa alla molla, di costante elastica **k**, la allunga di x_0 rispetto alla posizione di equilibrio senza massa appesa.

Se si sposta **delicatamente** la massa dalla posizione di equilibrio, e la si lascia andare, la massa comincia ad oscillare verticalmente, con un moto armonico di periodo **T.**

Per ogni massa appesa m misurerete due grandezze: l'allungamento x e il periodo dell'oscillazione T.

Le relazioni matematiche fra le masse, gli allungamenti, le durate dei periodi, la costante k della molla e g sono: $x(m) = \frac{g}{k} \cdot m = a \cdot m$; $m_e(T) = \frac{k}{(2\pi)^2} \cdot T^2 = b \cdot T^2$

Voi dovrete ricavare graficamente le due costanti **a** e **b,** utilizzando le grandezze misurate che sono:

m = la massa dei pesi di piombo appesi alla molla; **x(m)** l'allungamento corrispondente; **T=** il periodo di una oscillazione con la massa **m** appesa. Le masse $\mathbf{m_e}$ si calcolano dalle masse **m** e dai dati seguenti:

$\mathbf{m_e}$ **=** masse dei pesi in piombo + massa equivalente della molla = **m(pesi) +** $\mathbf{m_e}$ **(molla)**

dove m_e (molla) $\cong 42{,}2 \pm 0{,}4$ g [calcolata sommando la massa del supporto con quella delle spire libere o fisse].

Procedura: 1) Dal grafico [x(m); m] si ricava **a**=g/k **2)** Dal grafico [m_e (T^2); T^2] si ricava **b**= $k/(2\pi)^2$ **3)** Dal valore di **b** si calcola **k**. **4)** Dal valore di **k** e da **a** si calcola **g** **3)** Da **g** , $\mathbf{R_T}$ e **G** si ricava la massa della Terra $\mathbf{M_T}$

Operazioni preliminari

- Identificare i 10 dischi di Piombo (penna, segno col pennarello...) e dividerli in gruppi: 4 + 2 + 2 + 2.
- Segnare sulla carta millimetrata la posizione del fondo dell'oggetto senza pesi (o con due pesi).

MISURE da fare

Pesare i gruppi di masse. Mettere i gruppi di masse $\mathbf{m_i}$ (di cui avete già misurato la massa) sul supporto della molla; 4 dischi(m_4), poi 6 dischi(m_6), poi 8 dischi(m_8),...10 dischi (m_{10}). Per ogni gruppo di masse vanno eseguite due misure:

- l'allungamento $\mathbf{x_i}$ della molla a riposo per ogni gruppo di masse $\mathbf{m_i}$. **($\mathbf{m_i}$, $\mathbf{x_i}$)**
- La durata di n=10 periodi di oscillazione $\mathbf{T_n}$ = $\mathbf{nT_i}$. Per ogni gruppo di masse $\mathbf{m_i}$ rifare la misura almeno 3 volte.
- Fare una tabella: una serie di misure (gruppi di masse) per ogni riga.

# masse	m_i (g)	Δx_i (g)	T_i (10 osc) (s)	T_i (1)	$T_i(1)^2$	Massa m_{ei}

Elaborazione dei dati e calcolo di M_T

- Grafico 1
  - Riportare su di un grafico **lineare** le coppie **(m_i, x_i);** m in orizzontale, x in verticale.
  - Tracciare la retta migliore ad occhio che passa per i punti sperimentali.
  - Calcolare il coefficiente angolare (vedi esempio in fondo) ***a =Δg/Δk*** della retta, che sarà uguale a ***g/k***.
  - Deve venire circa ***0,19 < a < 0,27*** [m/Kg]. Se è molto al di fuori dell'intervallo indicato vuol dire che è stato commesso un errore grossolano in qualche misura, o in qualche unità di misura, o nel riportare i punti sul grafico, o nel valutare il coefficiente angolare.

- Grafico 2:
  - Per ogni gruppo di masse $\mathbf{m_i}$ calcolare la rispettiva massa equivalente $\mathbf{m_{ei} = m_i + 42{,}2\ g}$
  - Per ogni massa $\mathbf{m_{ei}}$ calcolare il valor medio del periodo T_i (T è il periodo di 1 oscillazione, quindi se ne avete misurate 10 il periodo sarà T(1 oscillazione)=T(10 oscillazioni)/10 , facendo la media aritmetica dei valori ottenuti.
  - Riportare su di un grafico **lineare**, le coppie **(T^2(i)), m_{ei});** T^2 in orizzontale, m_{ei} in verticale.
  - Calcolare il coefficiente angolare (vedi esempio in fondo) ***b=*** $\mathbf{\Delta m_{ei} /(\Delta T^2)}$ e da questo la costante elastica della molla **k**:

$$\mathbf{k} = b \cdot (2\pi)^2 = b \cdot 4 \cdot \pi^2 = b \cdot 4 \cdot \pi^2 \cong b \cdot 4 \cdot 10 = \mathbf{b \cdot 40} \quad [\mathrm{N/m}]$$

  - Utilizzare i valore di ***k*** e di ***a*** per calcolare ***g = a·k***

- Calcolo della massa della Terra**:** $\boldsymbol{M_T = \left(g \cdot R_T^2\right)/M_T}$

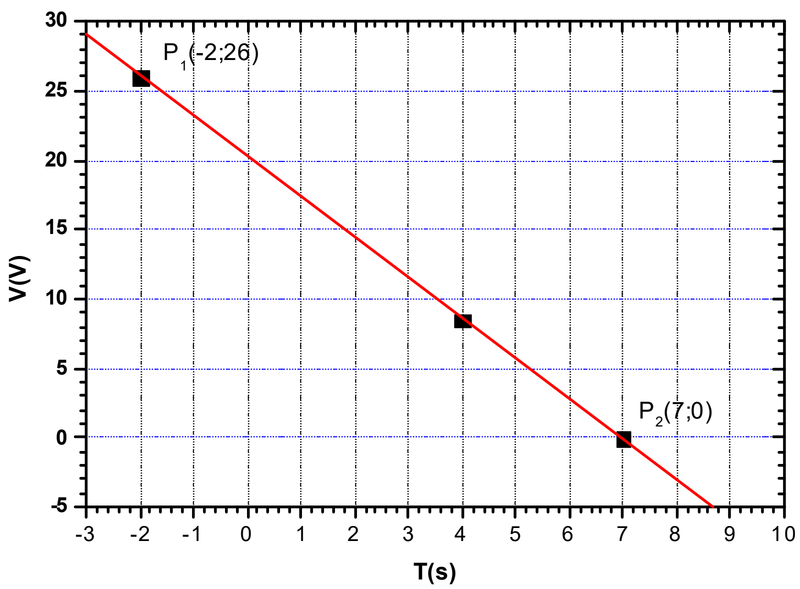
Calcolo del coefficiente angolare "a" per una funzione lineare del tipo: y(x)=ax+b

a = Δy/Δx, (è il caso in cui i punti sperimentali stanno su di una retta in scala lineare). Esempio (vedi grafico): si scelgono due punti della retta "lontani",(il calcolo è più preciso), ad esempio: P_1 (x_1 ; y_1) e P_2 (x_2 ; y_2).

- Calcolo di ***a***, utilizzando i due punti P_1(-2,26) , P_2(7,0) :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-26}{7+2} = \frac{-26}{9} \cong -2{,}9 \quad \mathrm{V/s}$$

L'incertezza di ***a*** è legata alla dispersione dei punti ed alla loro incertezza intrinseca.



La massa della terra è circa: $M_T \sim 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg